había un hombre tan diminuto que Robert sólo lo descubrió tras larga búsqueda. El cuarto estaba lleno de objetos curiosos. Unos cuantos de ellos eran grandes trenzas de cristal. Al señor Bockel le gustarían, pensó Robert, aunque no se pueden comer y tienen extrañas formas. Estaban enredados de manera curiosa y tenían muchos huecos. Y también había una botella de cristal verde.

—Mírala atentamente —le dijo al oído el diablo de los números a Robert—. En esa botella no se sabe qué está dentro y qué afuera.

Robert pensó: ¡No es posible! Una botella así sólo existe en los sueños.

—Imagina que quisieras pintarla de azul por dentro y rojo por fuera. No se puede. No tiene borde en ningún sitio. Nunca sabrías dónde termina la parte roja y dónde empieza la azul.

—¿Y la inventó ese señor diminuto de ahí? Cabría cómodamente en su propia botella.

—¡No tan alto! ¿Sabes cómo se llama? ¡Señor Klein! En alemán su nombre significa *pequeño*. Ven, tenemos que seguir."

En el libro se está haciendo referencia a la botella de Klein, otro objeto de interés topológico, del que puede investigarse más como se sugiere en las actividades.

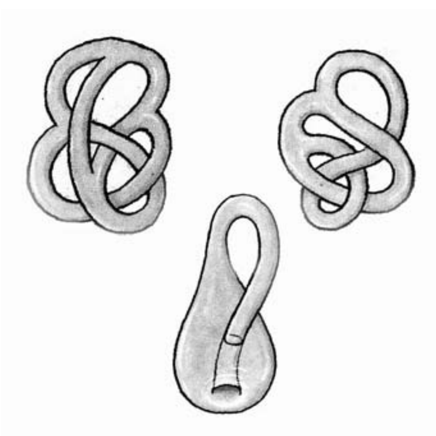
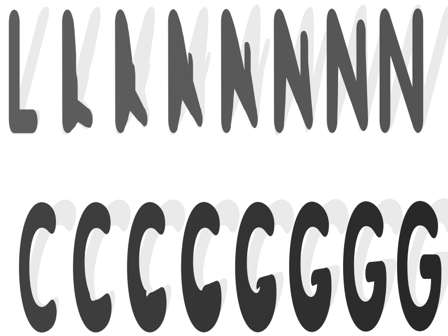


Figura 4: Botella de Klein. Tomada de *El diablo de los números.*

III. Actividades

1. Proponga que, por grupos, los alumnos lleven a cabo una investigación más completa sobre los distintos objetos topológicos que se mencionan en la guía (banda de Möbius, botella de Klein, nudos, trenzas, etc.).
2. Pida a los alumnos que, de acuerdo a la información en esta guía, encuentren la forma correcta de elaborar una banda de Möbius y demuestren que efectivamente se trata de una banda con un solo lado.
3. Promueva una investigación en la que los alumnos encuentren relaciones topológicas que aparecen en los libros de Lewis Carroll, *Alicia en el país de las maravillas* y *A través del espejo*. Discuta con ellos sus resultados.



IV. Bibliografía

The Random House Encyclopedia, Nueva York, 1985.

Barr, S., *Experiments in Topology*, Dover Publications, Nueva York, 1989.

Devlin, K., *Mathematics: The Science of Patterns*, Scientific American Library.

Hilbert, D. y S. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, Chelsea Publishing, Nueva York, 1990.

Esperamos sus comentarios y sugerencias, que pueden hacer con atención a: Rosa María Catalá, al teléfono 56 22 72 97, fax 54 24 01 38, correo electrónico comoves@universum.unam.mx

¿cómo ves? guíadelmaestro

Por Rosa María Catalá

Febrero 2001

Matemáticas y letras

Emanuel S. Torres Martínez
(No. 27, p. 30)

Maestros:

Esta guía se ha diseñado para que un artículo de cada número de *¿Cómo ves?* pueda trabajarse en clase con los alumnos, de modo que se adapte a los programas de ciencias naturales y a los objetivos generales de estas disciplinas a nivel bachillerato. Esperamos que la información y las actividades propuestas sean un atractivo punto de partida o un novedoso "broche de oro" para dar un ingrediente de motivación adicional a sus cursos.

I. Ubicación de la temática en los programas de bachillerato de la UNAM

Sistemas ENP y CCH

El artículo puede abordarse en cursos superiores de matemáticas, donde los temas de topología y geometrías no euclidianas puedan conectarse para enriquecer las clases consideradas.

II. Más información

Topología: el lenguaje del espacio

¿Por qué nos parecen graciosas la escenas de caricaturas donde los personajes se meten en lugares como mangueras con nudos y salen exactamente por el mismo lugar?, ¿qué habría de raro en un "consejo hogareño" de periódico que dijera: "Para reparar el agujero de un mantel, coloque antes que nada el mantel con el agujero boca arriba?" Ambas situaciones ofenden nuestros conceptos instintivos de topología que, como dice el artículo, es la rama de las matemáticas que tiene que ver con propiedades fundamentales de los objetos y del espacio. Ojo: el tamaño y la forma no entran en estas propiedades.

Esferas, redes y nudos

Es una verdad topológica, que independientemente de su largo y curvatura, una manguera tiene dos extremos. Similarmente, estamos seguros de que no importa el tamaño que tenga un mantel, sería imposible extenderlo con un agujero "por debajo". La topología toma estos aspectos intuitivos y los formaliza dentro de la lógica matemática. Se ocupa de todas las propiedades de los objetos que no se ven afectadas por cambios de forma, aunque sean extremos, y aquí podríamos referirnos a que Alicia (la del país de las maravillas) constituye un buen ejemplo ya que, aunque crece y se hace pequeñita de forma dramática, no deja de ser ella, no se rompe ni se fractura para crecer o disminuir su tamaño. Por ejemplo, cualquier objeto sólido simple sin agujeros es una pelota para un topólogo, ya que si el objeto estuviera hecho de plastilina se podría amasar hasta formar una esfera, sin tener que tornearse, rajar o dividir. Un botón con cuatro agujeros no es una pelota topológica. Es un sólido de cuatro conexiones, porque habría que hacer cuatro cortes y abrirlos en un extremo para poder hacer una esfera topológica. Las pequeñas criaturas que vivieran sobre la superficie de un botón, encontrarían el espacio muy diferente a aquellas que vivieran sobre la superficie de una esfera. Lo que le interesa al topólogo puro es el poder decidir cuándo entidades abstractas particulares (objetos y espacios de muchas formas y dimensiones) son o no son topológicamente equivalentes.

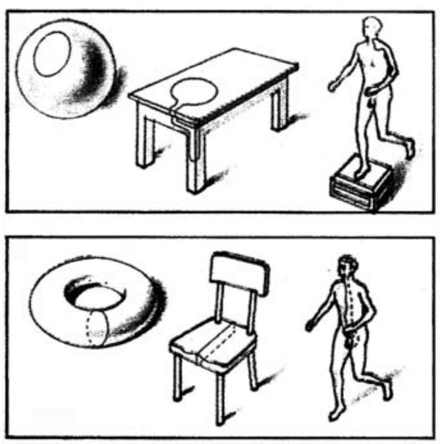


Figura 1: En la figura de arriba, la mesa y la estatua son pelotas topológicas. Pero el ser humano y la silla de la figura de abajo tienen agujeros (el hombre tiene canales digestivos que van desde la boca hasta el ano) y su topología se refiere más a la de un "toroide", por lo que representan otro conjunto topológicamente equivalente.

La intuición humana sólo es capaz de comprender la topología de figuras muy simples, y aún así en ocasiones conduce a conclusiones erróneas, por lo que sólo a través de la teoría y el desarrollo de teoremas más complejos se construyó esta rama particular de la geometría. Como menciona el propio artículo, la topología tiene aplicaciones en el mundo real. Un circuito eléctrico es una entidad topológica; su diagrama exacto no importa ya que sólo el patrón de interconexiones es eléctricamente significativo. La teoría de gráficas es la rama de la topología que tiene que ver con las redes y es fundamental para el diseño de circuitos eléctricos y de redes de computadoras. Y qué decir de los patrones que se siguen para realizar las antiquísimas puntadas del tejido: cada tipo de punto que realiza la experta tejedora es un ejercicio de topología aplicada.

Un lazo que tenga un nudo en medio mantiene el nudo, no importa cómo se deforme o estire y será topológicamente diferente a un lazo que no tenga el nudo. Con esta base, los diseñadores de textiles se ven forzados a practicar topología para producir telas con propiedades topológicas específicas; telas que puedan rasgarse en una dirección, que soporten el esfuerzo, y otras que, al romperse una fibra, no se deshagan completamente, como es deseable en el caso de las medias de nylon.

En el terreno matemático

La topología "seria", la que se hace en las universidades e institutos de investigación, tiene, sin embargo, poco que ver con el mundo práctico. Ninguna de sus ramas se puede asociar a las actividades humanas como lo hace por ejemplo la aritmética en las actividades bancarias. Es por lo tanto un área de estudio llena de potencial, como el taller en el que muchos matemáticos llevan a cabo sus juegos relacionados con una nueva ciencia. En el mundo en el que nos movemos la geometría euclidiana sigue siendo la más utilizada.

Un teorema típico de esta rama dice que para colorear un mapa plano sólo se necesitan cuatro colores para asegurar que las áreas adyacentes no compartirán el mismo color. El teorema no dice cómo puede lograrse esto, pero asegura que siempre puede lograrse y pudo comprobarse en 1976, después de un enorme número de cálculos computacionales. De forma similar se ha establecido que no importa qué tan vigorosamente se agite un café con una cucharita, en un instante dado, por lo menos un punto del líquido no se está moviendo; el topólogo sólo prueba que esto sucede, pero no dice cómo ocurre. En distintos tipos de espacios, se necesitan distintos tipos de teoremas para que funcionen. En una dona, se necesitan hasta siete colores para que las áreas adyacentes tengan colores distintos, y en una cinta de Möbius, se necesitan hasta seis colores.

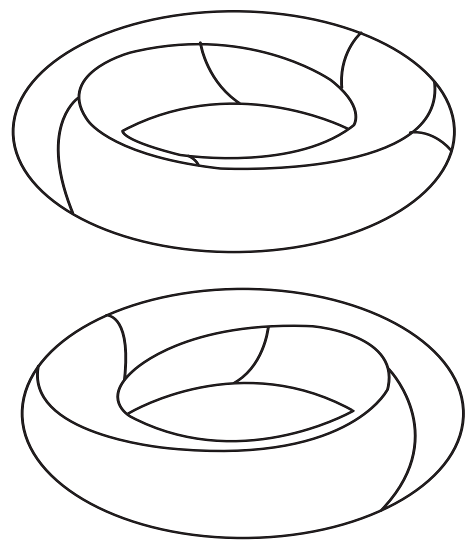


Figura 2: En una dona o toro, un mapa puede necesitar hasta siete colores para evitar que las áreas adyacentes tengan un mismo color. ¿Cuántos colores se necesitan en esta dona (vista por los lados, pero es la misma) para que no queden dos áreas iguales adyacentes?

Una cinta de Möbius es una contradicción a la fuerte intuición humana de que una cinta de papel debe tener dos lados. Se le llamó así por su inventor, el astrónomo alemán German Möbius (1790-1868). Su tira puede hacerse simplemente cortando una cinta de papel, darle una media vuelta en el medio y pegando los extremos para formar un lazo torcido. Este lazo tiene ahora un solo lado, como puede probarse dibujando una línea sobre su superficie con un lápiz. Para encontrar el punto de partida, no hay que darle nunca la vuelta a la cinta.

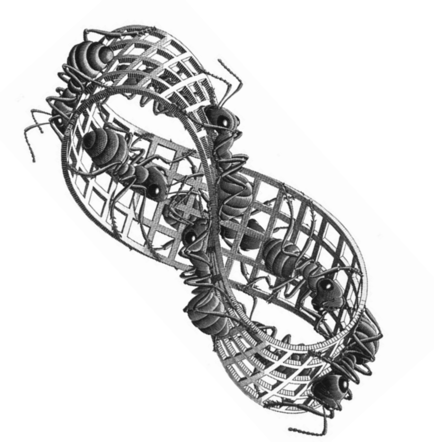


Figura 3: Cinta de Möbius dibujada por Escher. "Estas hormigas" por M. C. Escher (1898-1972) ilustra las propiedades de la banda de Möbius que contradicen nuestra intuición. Todas están de un lado, pero parecen estar en lados opuestos. Una banda hecha con dos medios giros tiene dos lados. El número de giros dicta el número de lados y dramáticamente afecta el resultado que se produce al cortar la banda por el medio. La topología permite explorar y describir éstas y otras muchas relaciones espaciales.

El espacio torcido

Otra rama de la topología es la de los "espacios torcidos", donde se trabajan más de tres dimensiones, a pesar de que ello suene difícil de imaginar. De hecho, es topológicamente posible que el Universo en sí tenga un doblez del tipo Möbius. Un resultado de esto podría ser el de un viajero que fue a un lugar suficientemente lejano del espacio y regresara como una imagen en el espejo de sí mismo, con el corazón del lado derecho. Los fabricantes de guantes podrían dedicarse a fabricar lotes completos de guantes izquierdos, enviar la mitad al espacio y regresar el cargamento con la cantidad exacta de guantes derechos para completar su lote.

Topología y literatura

En su maravilloso libro *El diablo de los números*, Hans Magnus Enzensberger también nos habla de objetos curiosos topológicamente hablando: "Llegaron a otra puerta, que estaba abierta de par en par. En la habitación