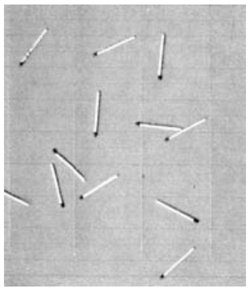
tadores en las carreras de caballos consultan largamente los datos que se publican sobre cada animal, sus resultados anteriores, sus lesiones recientes, los datos del *jockey*, etc., de manera que sus posibilidades de apostar con éxito son mayores. En la teoría del juego se trata de competir contra un oponente asumiendo en parte el resultado de algunos aspectos, pero con la certeza (el conocimiento) del desenlace de otros. En conflictos como la guerra o los negocios, la teoría del juego se utiliza usualmente para aclarar (reducir) el número de opciones posibles, sin embargo, éstas casi no se toman en cuenta. Si dos personas firman un acuerdo, por ejemplo, la teoría del juego recomienda que se engañe al otro, de manera que se obtengan más ganancias si el otro es honesto. Y en un mundo donde los eventos únicos pueden suceder o no, todo el concepto de probabilidad requiere de un tratamiento muy cuidadoso.

III. Actividades

1. Solicite a los alumnos que investiguen los siguientes términos o conceptos y los relacionen de alguna manera con el artículo de referencia:
   - estadística
   - aleatorio
   - azar
2. En México se dice coloquialmente que alguien tiene "chance" de ganar. Pida a sus alumnos que investiguen el significado de esta palabra en inglés y la traduzcan al español. ¿Realmente hay modo de cambiar "chance" (a lo mejor, es probable), por una sola palabra en nuestro idioma? Inicie una discusión de por qué creen que esta palabra anglosajona se ha arraigado tanto en nuestro lenguaje diario.
3. Pida a sus alumnos que investiguen más sobre las aplicaciones en la vida real de esta área de la matemática y al término de su búsqueda motive a que realicen un debate (a favor y en contra) del uso de esta teoría en las decisiones capitales que se toman en economía y finanzas o en políticas de población (por ejemplo) a partir de los resultados que arroja.
4. El problema del "fósforo del bufón". Como lo dice el artículo, es posible calcular el valor de P a partir de un tratamiento probabilístico. De acuerdo a la figura siguiente, un fósforo se echa sobre un mantel a rayas. Si las rayas son de un largo igual a *n* fósforos, la posibilidad de que el fósforo caiga sobre una línea es de 2/nP. Parece sorprendente encontrar el número 3.1416 en el resultado, que de hecho surge porque el fósforo puede aparecer en cualquier ángulo, como le sucede a un palito atorado en los radios de la llanta de una bicicleta. Los matemáticos han podido evaluar alternativamente el valor de π por este método.



Utilice esta curiosa situación para discutir con el grupo sobre cómo se podría encontrar la respuesta correcta.

IV. Bibliografía

1. Dunham, William, *Journey Through Genius, The Great Theorems of Mathematics*, Wiley and Sons, EUA, 1990.

2. Babini, José, *Historia suscinta de la matemática,* Tercera Edición, Espasa-Calpe, S.A., Colección Austral, Madrid, 1969.

3. *The Random House Encyclopedia*, Third Edition, Nueva York, 1990.

Esperamos sus comentarios y sugerencias, que pueden hacer con atención a: Rosa María Catalá, al teléfono 56 22 72 97, fax 54 24 01 38, correo electrónico comoves@universum.unam.mx

¿cómoves?

guíadelmaestro

Por Rosa María Catalá

agosto 2001

Un paseo por las matemáticas

Concepción Ruiz y Sergio de Régules
(No. 33, p. 16)

Maestros:

Esta guía se ha diseñado para que un artículo de cada número de *¿Cómo ves?* pueda trabajarse en clase con los alumnos, de modo que se adapte a los programas de ciencias naturales y a los objetivos generales de estas disciplinas a nivel bachillerato. Esperamos que la información y las actividades propuestas sean un atractivo punto de partida o un novedoso "broche de oro" para dar un ingrediente de motivación adicional a sus cursos.

I. Ubicación de la temática en los programas de bachillerato de la UNAM

Sistemas ENP y CCH

El artículo y esta guía pueden abordarse en cursos medios y superiores de matemáticas. Los temas del artículo (probabilidad y estadística en la primera parte y demostraciones matemáticas en la segunda) pueden tratarse antes o después de una clase relacionada para enriquecer la discusión.

II. Más información

1. Un poco de historia

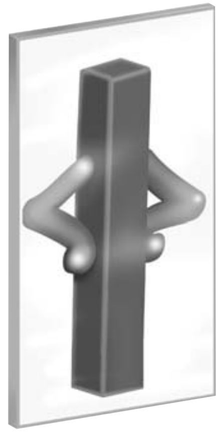
Para conocer un poco sobre los orígenes de la probabilidad como una rama de las matemáticas, debemos remontarnos al siglo XVI y presentar al que probablemente sea el personaje más bizarro en la historia de esta ciencia: Gerolamo Cardano (1501-1576), originario de Milán, Italia. Cardano es uno de los pocos matemáticos que escribió una autobiografía que, si bien dudosa en todo su contenido, da una idea de su tormentosa vida. De salud física y mental precarias, Cardano mostraba, sin embargo, una enorme capacidad para la vida académica. Se formó como médico, pero su personalidad conflictiva pronto hizo que no se le permitiera ejercer su profesión. Como jugador empedernido, una de las principales aportaciones de Cardano a las matemáticas proviene de un vicio al que dedicaba largas horas todos los días y del que nació un admirable escrutinio científico sobre el azar. Su obra *El libro de los juegos de azar* fue publicada póstumamente en 1663, y constituye el primer tratado serio sobre probabilidad.

Casi un siglo después, Blaise Pascal (1623-1662), nace en Francia y muere a la corta edad de 39 años, no sin dejar un vasto legado matemático que inició desde los 14 años, como alumno de René Descartes. De genio incuestionable, a los 18 años Pascal había inventado una máquina de sumar que permanece como el más importante predecesor de la computadora actual. Como Cardano, también se interesó en la teoría de la probabilidad, a la que hizo importantes aportaciones, llevando las matemáticas del juego a un nivel muy superior. Antes de morir, Pascal habría de conocer y establecer vínculos con otro genio matemático francés del siglo XVII: Pierre de Fermat (1601-1665), originario de Toulouse. Al igual que Pascal, Fermat destacó en numerosas áreas de las matemáticas. Creó su propia geometría analítica independiente, y su forma de hacerlo se considera casi más "moderna", que la del propio Descartes (véase la *Guía del maestro*, que corresponde al artículo "El ajedrez y las matemáticas", *¿Cómo ves?*, Núm. 20, sobre las geometrías no euclidianas). Así como Fermat merece compartir con Descartes el advenimiento de la geometría analítica, también ocupa un crédito con Pascal por su tratamiento matemático y fundación de la teoría de la probabilidad en la década que comprende 1650 a 1660. También hizo aportaciones interesantes e independientes al cálculo infinitesimal, por lo que algunos franceses (exageradamente tal vez) lo consideran cofundador de esta área matemática.

Finalmente, al hablar de probabilidad hay que referirse también a uno de los hermanos Bernoulli. Jacob Bernoulli (1654-1705), el mayor, era un matemático brillante que hizo importantes contribuciones al cálculo, a la suma de series infinitas y, particularmente, a la probabilidad. La publicación póstuma de Bernoulli *Ars Conjectandi*, en 1713, se convirtió en piedra angular de la teoría de la probabilidad actual y permanece como su obra maestra.

2. Pero... ¿qué es la probabilidad?

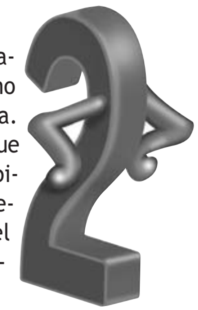
Hemos repasado los nombres, lugares y fechas que destacan en el advenimiento de esta importante rama matemática. Queda claro que es en Europa donde, desde mediados del siglo XVI hasta el inicio del siglo XVIII, se dieron los pasos determinantes para que hoy en día podamos plantearnos problemas como el de los coches rojos del artículo de referencia. Créase o no, ese tipo de problemas son los que se toman en cuenta, por ejemplo, en las compañías de seguros, uno de los sectores de servicios donde la probabilidad desempeña un papel preponderante.



Para comprender mejor de lo que estamos hablando vale la pena definir el término probabilidad: "número que representa la posibilidad de que cierto hecho ocurra". La probabilidad de un evento específico es el número de maneras en que ese evento puede suceder, dividido entre el número total de soluciones. Por ejemplo, al tirar un dado con seis caras, hay seis soluciones (situaciones resultantes) posibles, tres de éstas están dadas por números impares: entonces la probabilidad de que en la cara superior de un dado aparezca un número impar es 3/6 = 1/2. Esto asume que cada tirada es igualmente posible. Una idea menos circular de la probabilidad es la que utiliza el concepto de límite. "Si el dado se tirara un gran número de veces, el número de caras impares resultantes de dividir entre el total de tiradas tendría que tender al valor 1/2. La teoría de la probabilidad se encarga de estudiar el análisis de los eventos aleatorios (al azar) de este tipo". La anterior definición pone en evidencia que es muy fácil caer en falacias populares cuando se usa la teoría de probabilidades. Consideremos, para ilustrar lo anterior, la siguiente fábula.

Un corredor de coches, preocupado por la posibilidad de que se le ponche una llanta durante la carrera, consulta a un matemático. Éste le dice: "No se preocupe, sólo hay una posibilidad en mil de que a un coche se le ponche una llanta". "Pero... —responde el corredor—, yo corro mucho". "Entonces siempre cargue con una llanta ponchada en su coche, ya que la posibilidad de que tenga dos llantas ponchadas es una en un millón".

¿Dónde está la falacia? Si se consideran dos eventos independientes, cada uno de ellos con una probabilidad de un milésimo, la probabilidad de que ambos ocurran al mismo tiempo se obtiene multiplicando las dos probabilidades, dando el resultado de un millonésimo, como se presenta en el problema. Pero ambos eventos tienen que ser independientes: la posibilidad de uno no puede alterarse por la existencia del otro, lo cual sucede al asegurar su existencia.



Esta multiplicación es uno de los dos grandes pilares de la teoría de la probabilidad. La otra, la regla de la adición, dice que dados dos eventos mutuamente exclusivos (como el tirar uno o dos en un dado; ambos no pueden suceder al mismo tiempo), la posibilidad de que uno u otro ocurra es la suma de sus probabilidades; así si cualquiera de los dos gana, la posibilidad de éxito es 1/6 + 1/6, o sea 1/3.

3. ¿Cómo se usan las reglas de la probabilidad?

Las dos reglas anteriores (la de la multiplicación y la adición), cuidadosamente utilizadas, pueden resolver la mayoría de los problemas de probabilidad. Tienen su base en una derivación sutil llamada "teoría atómica", que trata cualquier evento azaroso como si estuviera compuesto de una serie básica de "eventos equiprobables". Al calcular qué combinación de éstos lleva al resultado deseado, se obtiene su probabilidad. Pero la idea requiere de un manejo muy especial, ya que muchos argumentos falaces dependen de la opción que se haga de los eventos equiprobables. ¿Cuál es la probabilidad de que existan monos en Júpiter, por ejemplo? Puede ser que los haya o que no los haya y podría argumentarse que, dado que nadie ha estado en Júpiter, estas situaciones mutuamente exclusivas son igualmente probables. Entonces cada opción tiene la mitad de la verdad y hay 50% de probabilidad de que haya monos en Júpiter. De manera equivalente, veamos otro problema: ¿cuál es la probabilidad de obtener águila y sol (cara y cruz), al tirar consecutivamente una moneda? Puede razonarse que hay sólo tres posibilidades básicas: dos águilas (aa), águila y sol (as), y dos soles (ss). Sólo una de estas opciones es favorable, de manera que la probabilidad es 1/3. Pero esto no es así. Hay de hecho cuatro "equiprobabilidades atómicas": aa, as, sa y ss, de las cuales dos son favorables. La probabilidad es entonces 2/4, o un 50%.

4. Las posibilidades de éxito

En notación matemática, las posibilidades varían de 0 (imposible) a 1 (cierto). Si hay siete posibilidades equiprobables, y dos de ellas resultan en éxito, las posibilidades de certeza son de 2 en 7 o 2/7 o 0.2857. Esto también puede expresarse como 28.57% o, en lenguaje de apostadores, de 2 a 5 a favor o de 5 a 2 en contra. Dichas expresiones se hacen más intuitivas cuando se aplican a situaciones que pueden ocurrir muchas veces. En una corrida con 7 000 eventos, cada una con una probabilidad de 2/7, se espera que alrededor de 2 000 eventos sean exitosos. Un jugador quedaría a mano si en una tarde apostara varias veces a favor de un caballo con probabilidades de 2 a 7 de ganar, ya que al hacerlo finalmente sería recompensado con un premio de $7 contra $2 de inversión. Pero tendría que apostar muchas veces. Y a lo mejor tampoco así gana nunca y pierde toda su inversión esperando que suceda el evento deseado. Cuando los eventos equiprobables básicos son claros y conocidos (como en el caso de la moneda en donde el resultado es águila o sol), la teoría de la probabilidad puede dar posibilidades que no dan paso a la ambigüedad. Todas las casas de juego y casinos usan este principio para fijar las posibilidades en sus juegos, de manera que tengan la garantía de salir ganadoras de acuerdo al promedio de jugadores y apuestas. En resumen, alguien puede ganar un día, pero promediado con todos los que pierden, la "casa gana".

5. El uso en conflictos de la vida real

Basada en eventos como los que se derivan de los juegos de azar, en probabilidad hay una subdivisión que se conoce como la "teoría del juego", donde entran a participar nuevas variables que ayudan a decidir si un evento será más o menos probable. Los apos-