Φ, encontró su lugar tanto en la arquitectura griega como en el arte renacentista. Por ejemplo, como se menciona en el artículo de referencia, la relación entre el alto y el ancho del frente del Partenón en Atenas, construido en el siglo V a. C. es casi exactamente Φ. El hecho de que un rectángulo cuyos lados estén en la relación de Φ (rectángulo áureo) sea agradable al ojo humano es algo que se ha sabido durante siglos. En el siglo XIX, varios psicólogos, encabezados por Adolf Zeising, ensayaron con el gusto de los seres humanos en lo referente a la forma del rectángulo. Todos ellos descubrieron que nosotros preferimos la forma de un rectángulo similar o igual al rectánglo áureo.

Existe evidencia de que los antiguos egipcios pueden haber tenido conocimiento de esta proporción, ya que el papiro Rhind (alrededor de 1650 a. C.) hace referencia a una "proporción sagrada" y la proporción entre la altura de la cara de la Gran Pirámide en Gizeh y la longitud de la base es casi exactamente 1.618.

V. Actividades

Para analizar en clase y pensar con los alumnos, aquí se presentan algunos atraibutos de la proporción áurea:

1. Observa la figura 5, un rectángulo que tiene lados iguales a 2 y a ($\sqrt{5}$ +1). Hemos subdividido el rectángulo en un cuadrado cuyos lados tienen una longitud de 2, y en un pequeño rectángulo. El rectángulo más pequeño tiene ahora la misma proporción en sus lados que el rectángulo mayor.
   ¿Significa esto que el rectángulo pequeño es un rectángulo áureo? ¿Por qué?

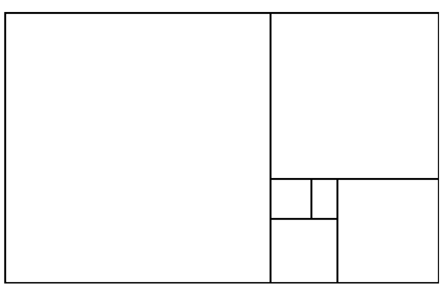

Figura 5.

2. ¿Es posible continuar este proceso de forma indefinida? ¿Qué espiral se genera? Dibújala sobre la figura 5.
3. Es casi seguro que los griegos tenían conocimiento de muchos de los atributos de F. Los pitagóricos utilizaron la estrella de cinco puntas como uno de sus símbolos sagrados. La figura 6 muestra la estrella con diversas magnitudes identificadas. La relación entre estas magnitudes suele ser la proporción áurea.

$$\Phi = \frac{AB}{BC} = \frac{CH}{BC} = \frac{IC}{HI} = \frac{2DE}{EF} = \frac{EG}{2DE} = \frac{\sqrt{EG}}{EF}$$

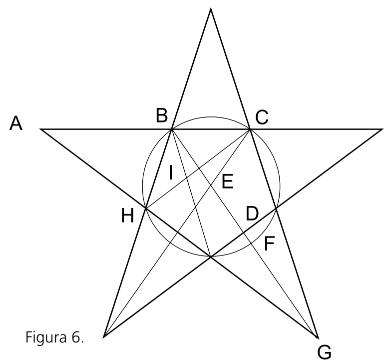

Figura 6.

De acuerdo con la expresión anterior, asigna valores numéricos a cada fragmento y demuestra numéricamente la proporción aúrea para la estrella pitagórica.

VI. Bibliografía

Kline, Morris, *Matemáticas para los estudiantes de Humanidades*, Conacyt-Fondo de Cultura Económica, México, 1992.

Clawson, Calvin, *Misterios matemáticos. Magia y belleza de los números*, Editorial Diana, México, 1999.

Esperamos sus comentarios y sugerencias, que pueden hacer con atención a: Rosa María Catalá, al teléfono 56 22 72 97, fax 54 24 01 38, correo electrónico comoves@universum.unam.mx

¿cómoves? guíadelmaestro

Por Rosa María Catalá

Abril 2004

La divina PROPORCION

De José de la Herrán

(No. 65, p. 10)

Maestros:

Esta guía se ha diseñado para que un artículo de cada número de *¿Cómo ves?* pueda trabajarse en clase con los alumnos, de modo que se adapte a los programas de ciencias naturales y a los objetivos generales de estas disciplinas a nivel bachillerato. Esperamos que la información y las actividades propuestas sean un atractivo punto de partida o un novedoso "broche de oro" para dar un ingrediente de motivación adicional a sus cursos.

I. Relación con los temarios de la UNAM

Esta guía y el artículo de referencia pueden utilizarse en las materias de filosofía, historia del arte, artes plásticas y matemáticas, particularmente en las sesiones destinadas a estudiar la geometría euclidiana y los preceptos pitagóricos relacionados con la sección áurea.

II. La influencia cultural de la geometría euclidiana

La sección aurea, su concepción y tratamiento por parte de los distintos hombres de ciencia que la estudiaron y se maravillaron con ella, muestra que si el desarrollo de las matemáticas se hubiera detenido con la creación de la geometría euclidiana, aún sería enorme la contribución de ésta a la formación de la civilización occidental. Todavía hoy, muchos matemáticos y filósofos aseguran que la geometría euclidiana fue y sigue siendo la demostración más pasmosa del poder y la eficacia de nuestra capacidad de razonar. Veamos por qué.

Los griegos vivieron enamorados de la razón y la aplicaron a la filosofía, a la teoría política e incluso a la crítica literaria. A tal grado estaban convencidos de su eficacia que demostraron cómo, mediante el razonamiento basado en sólo 10 hechos (axiomas), era posible producir miles de conclusiones nuevas, en su mayoría insospechadas, y cada una de ellas tan cierta como los axiomas mismos. Obtuvieron conocimientos nuevos, absolutamente dignos de confianza y aplicables, conocimientos que superaron la necesidad de pasar primero por la experiencia o que no se habrían conseguido de otra manera.

Los griegos demostraron, pues, el potencial de una facultad que en otras civilizaciones permaneció latente. Fue como si de improviso le hubieran enseñado al mundo que existía un sentido más, el sexto, del que nadie se había percatado antes. Se vio la manera de construir sistemas de pensamiento firmemente articulados a través de la abstracción que inicia por medio de verdades elementales para, al fin, obtener un cuerpo de conclusiones y conocimientos nuevos.

Los propios griegos reconocieron la amplia significación de la geometría euclidiana, y Aristóteles hizo hincapié en que el procedimiento euclidiano debería ser la finalidad y objetivo de todas las ciencias. Para este gran filósofo, cada ciencia debía comenzar sentando sus principios fundamentales y pertinentes, para luego avanzar hacia verdades nuevas por demostraciones deductivas, lo cual fue abrazado por teólogos, filósofos, teóricos de la política y estudiosos de las ciencias naturales. Con la geometría euclidiana se inició la lógica, misma que hacia fines del periodo clásico formulaba los principios del razonamiento válido por medio del propio Aristóteles. De esa formulación de principios se desprende, entre otros, el *principio de contradicción*, según el cual ninguna proposición puede ser al mismo tiempo verídica y falsa. Éste y otros principios se ratifican de manera constante por medio del estudio de la geometría; los propios griegos hicieron resaltar el valor de las matemáticas como preparación para el estudio de la filosofía. Esto se conserva en la actualidad en los textos de lógica, en los cuales se ilustran los principios del razonamiento correcto, sin riesgo de caer en vaguedades al exponer los conceptos y sus relaciones.

Por último baste decir que la geometría euclidiana fue la que inspiró la investigación matemática de la naturaleza; con ella aprendimos que contamos con un instrumento poderoso para explorarla, explicarla y modificarla: un lenguaje inigualable y verdaderamente hermoso.

III. Un antecedente conflictivo

No obstante que los griegos no aceptaban las fracciones, los números negativos y el cero como números, sus matemáticas deductivas les permitieron descubrir una clase totalmente nueva de números, pero este hallazgo resultó ser más problemático que benéfico para sus teorías.

Bajo la influencia de los pitagóricos, muchos griegos creyeron que los números eran los átomos que constituían el mundo material. De acuerdo con la leyenda sobre la creación del Universo que defendían los pitagóricos, al principio existía "La unidad", "Lo limitado", algo indivisible y completo, carente de extensión. Rodeando a este ente o mónada estaba lo ilimitado, que era el principio de la extensión (el espacio). De alguna forma, lo ilimitado dividió o separó a la mónada en números atómicos individuales. A su vez, estos números por sí mismos, se organizaron geométricamente para generar las formas simples que, por su parte, se convirtieron en los cuatro elementos: tierra, aire, fuego y agua.

Una característica importante de este proceso era la armonía que estaba identificada con las relaciones correctas entre los números enteros. Para mostrar un ejemplo simplificado, podemos considerar un triángulo cuyos lados estén en la relación 3:4:5. Las longitudes de los lados de este triángulo son 3 unidades, 4 unidades y 5 unidades.

Veamos ahora el caso de un cuadrado cuyos lados sean iguales a una unidad cada uno (figura 1). Si los lados miden una unidad, ¿cuál es la longitud de la diagonal? Según la cosmología pitagórica, esta longitud debería ser la relación de algún número entero, o en términos modernos, una fracción de algún tipo. Sin embargo, algún pitagórico obstinado demostró que en un cuadrado cuyos lados fueran la unidad, la longitud de la diagonal no podía ser una fracción, y corresponde, de hecho, a lo que los griegos llamaban un número inconmensurable: $\sqrt{2}$. La raiz cuadrada de dos no se puede representar como la relación entre números enteros.

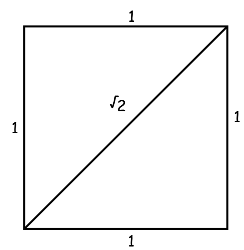

Figura 1.

Este descubrimiento constituyó un escándalo tal para los pitagóricos que todos juraron mantenerlo en secreto. Sin embargo, alguien —posiblemente Hiparco de Metapontum— lo reveló. Una leyenda dice que por esta traición, Hiparco fue expulsado de la orden pitagórica. Como haya sido, a partir de entonces los griegos tropezaron con toda clase de números que no se comportaban como debían. Como su teoría sólo incluía números naturales y sus relaciones, la longitud inconmensurable de la diagonal tuvo que separarse de la aritmética. A causa de este descubrimiento, los matemáticos griegos dividieron las matemáticas en las disciplinas de la geometría, que era el estudio de las líneas y los puntos, y la artimética, que estudiaba los números.

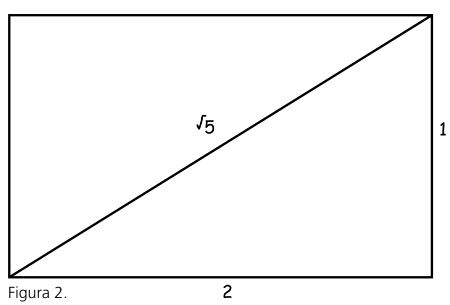

Figura 2.

Todos los teoremas de Euclides se definieron en términos de objetos geométricos y no de números. La separación entre la aritmética y la geometría continuó durante 2000 años, hasta que René Descartes unió nuevamente estas dos disciplinas en su geometría analítica.

¿Cómo debemos llamar a esta nueva clase de números representados por $\sqrt{2}$? ¿Existen otros números similares? Según parece, y fue demostrado por los griegos, cualquier raíz cuadrada de un número entero que no sea cuadrado perfecto es uno de estos números inconmensurables. Por lo tanto $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ y $\sqrt{8}$ son todos números inconmensurables, conocidos ahora como números algebraicos.

IV. La proporción aúrea

El descubrimiento de la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado fue como una ducha de agua helada para las matemáticas griegas y desacreditó la metafísica pitagórica. Sin embargo, la siguiente extensión lógica de la misma idea le dio a los griegos un concepto geométrico de gran valor y un hermoso número para ser utilizado a través de los años y para nuestro regocijo actual.

Para encontrar este número solamente debemos preguntarnos: ¿qué sucede si, en lugar de un cuadrado, consideramos un rectángulo con lados que midan 1 y 2? Es totalmente natural que los griegos, después de considerar un cuadrado con lados de valor 1, hayan ampliado la idea para analizar un rectángulo de 1 x 2.

En la figura 2 tenemos un rectángulo con estas características, y se ha trazado la diagonal del mismo. Hay que observar que la diagonal corta al rectángulo en dos triángulos rectángulos. Conociendo la medida de los lados del triángulo rectángulo, podemos utilizar el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la diagonal:

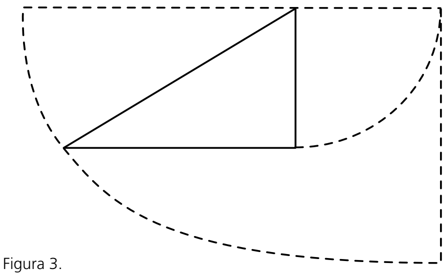
Figura 3.

$$(\text{diagonal})^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

Ahora obtenemos la raíz cuadrada de la suma de los lados y la diagonal = $\sqrt{5}$. Pero los griegos no se detuvieron aquí. Tomaron uno de los triángulos, desconectaron una esquina, alinearon el lado igual a 1 con la diagonal, y después giraron el lado igual a 2 para formar los dos lados de un nuevo rectángulo (figuras 3 y 4). El rectángulo resultante tiene varias características interesantes y, para los antiguos griegos, representó una figura geométrica agradable a la vista. La proporción entre los dos lados del rectángulo se designa con la letra griega phi (Φ). En consecuencia tenemos:

$$\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1.6180339...$$

Como la ecuación de Φ contiene un radical, el resultado es un número algebraico, pero no es racional, es decir, no es igual a la relación entre dos números enteros. Por lo tanto, su desarrollo decimal como en el caso de pi (π) y de *e*, es un decimal infinito no periódico.

Los griegos se refirieron a esta relación con la frase bastante larga de "la división de un segmento en relación justa y extrema", o simplemente le llamaron "la sección" o "la sección áurea".

La "sección" griega o relación

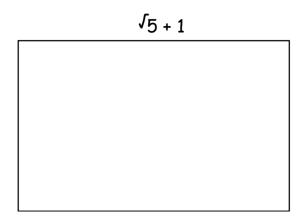

Figura 4.