Es muy fácil dividir ángulos en 2, 4, 8,... partes, y muchos ángulos especiales se pueden trisecar (90°, 180°,...) pero el problema general no tiene solución exacta. La primera prueba rigurosa de esta imposibilidad fue hecha por Pierre Wantzel en 1837. Hay muchas maneras de trisecar ángulos con medios menos restrictivos que los impuestos por los griegos clásicos, el método que se explica a continuación es el de Arquímedes.

Dado un círculo (centro O, radio r), y una cuerda AB, se toma el punto C sobre AB de manera que BC = r. Se unen C y O, la recta CO corta la circunferencia en D y F. Por lo tanto $\angle AOF = 3$ veces $\angle BOC$.

Demostración:

$\angle BOC = \angle BCO$ (Δ AOB es isósceles)

$\angle ABO = \angle BOC + \angle BCO$ (ángulo exterior)

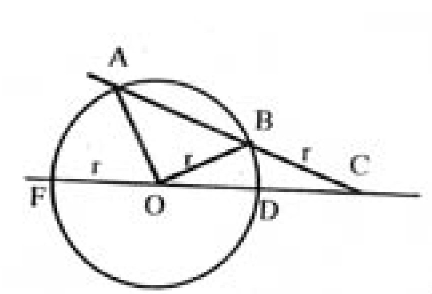
$= 2\angle BOC$

$\angle CAO = \angle ABO$ (Δ AOB es isósceles)

$\angle ACO = \angle BOC$ (Δ OBC es isósceles)

$\angle AOF = \angle CAO + \angle ACO$ (ángulo exterior en ΔAOC)

$= 3\angle BOC$



Ahora, por ejemplo, para dividir un ángulo dado AOF en tres partes iguales se construye un segmento BC = r, de manera tal que la prolongación de BC pase por A. Esto se puede hacer si la distancia r está marcada sobre la regla y eso viola las restricciones de los griegos, quienes estipulaban que la regla no puede ser graduada.

V. Bibliografía

Boyer, Carl B., *Historia de la matemática*, Alianza editorial, Madrid, 1999.

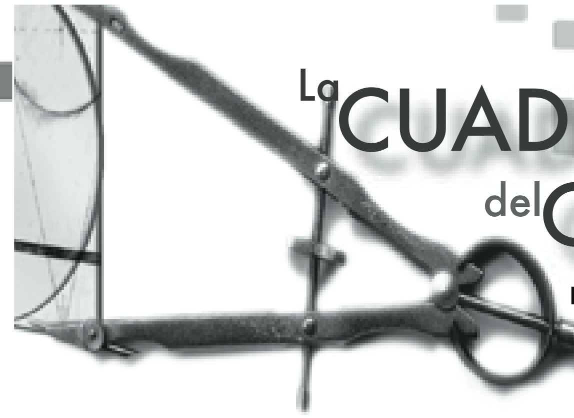
Everyday Science Explained, National Geographic, EUA, 1999.

Esperamos sus comentarios y sugerencias, que pueden hacer con atención a: Rosa María Catalá, al teléfono 56227297, fax 54 24 01 38, correo electrónico: comoves@universum.unam.mx

¿cómo ves? guíadelmaestro

Por Rosa María Catalá

Febrero 2005



La CUADRATURA del CÍRCULO

De: Daniel Martín Reina

(No. 75, p. 16)

Maestros:

Esta guía se ha diseñado para que un artículo de cada número de *¿Cómo ves?* pueda trabajarse en clase con los alumnos, de modo que se adapte a los programas de ciencias naturales y a los objetivos generales de estas disciplinas a nivel bachillerato. Esperamos que la información y las actividades propuestas sean un atractivo punto de partida o un novedoso "broche de oro" para dar un ingrediente de motivación adicional a sus cursos.

I. Relación con los temarios de la UNAM

Esta guía y artículo pueden utilizarse de manera indistinta en las materias de filosofía e historia, y particularmente en la clase de matemáticas destinada a estudiar los conceptos de geometría (euclidiana y no euclidiana) y topología.

II. El origen: Anaxágoras de Clazomene

El siglo V a. C. fue un periodo crucial en la historia de la civilización del mundo occidental, ya que inicia con la derrota de los invasores persas de Grecia y se cierra con la victoria de Esparta sobre Atenas. Entre estos dos sucesos memorables se desarrolló la esplendorosa época de Pericles, con su apogeo literario y artístico. De Jonia llegaron hombres como Anaxágoras, de mentalidad sumamente práctica y del sur de Italia otros como Zenón, con inclinaciones más metafísicas. Demócrito de Abdera mantenía una concepción materialista del mundo, mientras que Pitágoras defendía en la magna Grecia una actitud idealista. En Atenas podían encontrarse entonces seguidores entusiastas tanto de las antiguas ramas del saber como de las nuevas, que iban de la cosmología a la ética. Se vivía allí un atrevido espíritu de libertad de investigación que a veces entraba en conflicto con las costumbres establecidas. Anaxágoras fue encarcelado en Atenas acusado de impiedad, por afirmar que el Sol no era una deidad, sino una gigantesca piedra al rojo, tan grande por lo menos como el Peloponeso. Este personaje es un buen ejemplo del espíritu de investigación racional, puesto que consideraba como el objetivo de su vida el estudio de la naturaleza, determinación que heredó de la antigua tradición jónica de la que Tales había sido fundador. El entusiasmo intelectual de Anaxágoras lo compartieron muchos de sus paisanos por medio de la lectura de uno de sus libros: *Sobre la* *naturaleza*, primer *best-seller* científico en el mundo, que podía comprarse en Atenas por sólo un dracma. Anaxágoras representó en su época la motivación griega típica del deseo de conocer y era, en principio, más un filósofo de la naturaleza que un matemático, pero su mente inquisitiva lo llevó a participar también en el estudio de este tipo de problemas. Cuenta Plutarco que, mientras estaba en prisión, Anaxágoras se ocupó de la cuadratura del círculo, la cual, como señala el artículo de referencia, resultó ser un problema que iba a fascinar a los matemáticos durante más de dos mil años.

Con este ejemplo y el de los otros dos problemas clásicos que se tratarán a continuación, se puede ver que en Grecia se practicaba una matemática muy distinta a la de los egipcios y los babilonios, en la que ya no se trata de la aplicación de una ciencia de los números a una faceta de la vida práctica, sino de una cuestión puramente teórica en la que el papel fundamental lo desempeña la sutil distinción entre la mayor o menor precisión de un proceso aproximado y la exactitud de pensamiento. En el mundo griego la matemática estaba más estrechamente relacionada con la filosofía que con los problemas prácticos de la vida ordinaria, y esta afinidad ha persistido hasta hoy.

III. Los tres problemas clásicos

Anaxágoras murió en 428 a. C., un año antes del nacimiento de Platón y un año después de la muerte de Pericles. Se dice que Pericles sucumbió a la peste que se llevó a una cuarta parte de la población ateniense, y es probable que la profunda impresión que produjo esta catástrofe fuera el origen de un segundo problema matemático famoso.

Según datos que tenemos de esos tiempos, se envió una delegación al oráculo de Apolo en Delos para preguntar cómo podría conjurarse la peste, a lo que el oráculo contestó que era necesario duplicar el altar cúbico dedicado a Apolo. Al parecer, los atenienses duplicaron diligentemente las dimensiones del altar, pero esto no sirvió de nada para detener la peste; como única consecuencia, el altar sólo había aumentado ocho veces su volumen. Ése es, según la leyenda, el origen del problema de la "duplicación del cubo", también denominado "el problema de Delos": dada la arista de un cubo, construir, usando únicamente la regla y el compás, la arista de otro cubo que tenga el doble de volumen que el primero.

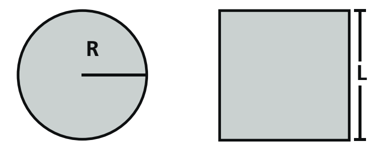
Por la misma época circuló en Atenas un tercer problema famoso: dado un ángulo arbitrario, construir, con regla y compás únicamente, un ángulo igual a un tercio del ángulo dado.

Estos tres problemas —la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo— se conocen desde entonces como "los tres problemas clásicos" de la antigüedad. Hoy en día aceptamos que estos problemas son insolubles utilizando únicamente regla y compás, y sólo se resuelven por medio de geometrías no euclidianas. No obstante, la mejor parte de la matemática griega y también buena parte del pensamiento matemático muy posterior, vino motivada por los esfuerzos para lograr lo imposible o, si éstos fracasaban, para modificar las reglas del problema.

IV. Actividades

Los tres problemas clásicos resultan excelentes proyectos de investigación para los alumnos, pero también pueden trabajarse en clase de manera conjunta con ellos.

1. **La cuadratura del círculo**
   Por medio de la lectura del artículo sabemos en qué consiste este problema, la figura siguiente ayuda a visualizarlo:



Radio: R
Área: $\Pi \cdot R^2$

Área: $L^2 = \Pi \cdot R^2$
Lado: $L = R\sqrt{\Pi}$

Ferdinand von Lindemann demostró en 1882 que era imposible construir "exactamente" $\sqrt{\Pi}$ con regla y compás (los instrumentos "divinos" de Platón). Los segmentos construidos con regla y compás se expresan por raíces cuadradas, pero Π no es expresable por raíces cuadradas.

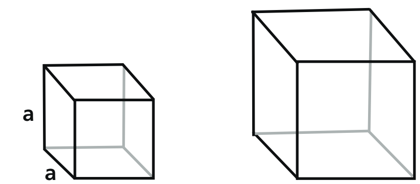
El problema se ha planteado de muchas maneras antes que la descrita en el artículo, pero hay que usar otros medios, por ejemplo:

- Cuadratriz de Hipias (425 a. C.)
- Espiral de Arquímedes (287-212 a. C.)
- Cuadratriz de Tschirnhausen (1651-1708):
- Construcción geométrica de D. Spetch (1836), en la que se construye $\sqrt{\Pi} = 0.8862268$ una excelente aproximación, con seis decimales.

2. **La duplicación del cubo**
   El problema consiste en construir el lado de un cubo cuyo volumen sea doble del volumen del cubo inicial.

   Para eso habría que construir un segmento de longitud igual a la raíz cúbica de 2, y esto es imposible utilizando solamente la regla y el compás.

   Ya en el siglo IV a. C., Menecmo, matemático griego inventor de las cónicas, había construido dicho segmento por



intersección de una parábola con una hipérbola.

   Con la notación y representación actuales, tendríamos la intersección de las curvas $y = x^2$ con $y = 2/x$, tal como aparece en la figura a continuación.

3. **La trisección del ángulo**
   Se trata de dividir un ángulo en tres partes iguales con regla y compás solamente.