empezado a aparecer pruebas matemáticas que establecen la existencia de objetos particulares. Sin embargo, no han ofrecido, (como sucede con los intuicionistas) una forma de construirlas explícitamente en un número finito de pasos.

Las entidades lógicas de los formalistas emergieron como consecuencia de las propiedades de una colección infinita de objetos, en un momento en que se asumía que las colecciones infinitas de cosas eran gobernadas por el mismo sentido común lógico que se aplica a las colecciones finitas (al igual que el hecho de asumir que una colección tiene o no ciertas propiedades). Algunos matemáticos estaban nerviosos sobre este paso al vacío o acto de fe, debido a que los juegos o colecciones infinitas no son físicamente realizables. A este respecto, David Hilbert, un entusiasta de la postura formalista, propuso una nueva filosofía al definir a las matemáticas como "la exclusiva manipulación de símbolos de acuerdo con reglas específicas" y "si las manipulaciones se llevan a cabo correctamente el resultado es un hermoso bordado de conexiones lógicas".

A partir de estas frases, uno podría pensar que Euclides era el arquetipo de los formalistas, lo cual parece muy sensato en retrospectiva, pero recordemos que Euclides abstrajo todos sus axiomas a partir de la observación del mundo real. Todos sus teoremas pueden visualizarse dibujando puntos y líneas en la arena y midiendo ángulos.

Bajo la postura de Bourbaki, las matemáticas modernas no requieren de esa serie de axiomas para poseer propiedades visualizables o evidentes por sí mismas y se opone a la postura platonista en cuanto a que las reglas y axiomas que se desprenden de su estudio son puramente nuestras creaciones y no tienen un significado independiente.

IV. El lenguaje de la ciencia

La mayor parte del enorme desarrollo que experimentó la matemática durante los años siguientes a la Segunda Guerra Mundial ha tenido poco que ver con los problemas de las ciencias de la naturaleza. Más bien ha venido estimulado por problemas internos de las matemáticas puras. Sin embargo, en el mismo periodo las aplicaciones de la matemática a otras ciencias se han multiplicado extraordinariamente. La explicación de esta aparente incongruencia parece clara: la abstracción y la identificación de modelos generales han ido desempeñando papeles cada día más importantes en el estudio de la naturaleza, de forma paralela a lo que ha sucedido en la matemática. El hecho de que haya una conexión íntima entre los fenómenos experimentales y las estructuras matemáticas parece completamente confirmado de la manera más inesperada por los descubrimientos recientes de la física, aunque la razón de este acuerdo tácito entre ambas ciencias siga siendo oscura. En la propia obra de Bourbaki se lee el siguiente párrafo, pertubardor y fascinante: "Desde el punto de vista axiomático, la matemática se nos presenta como un almacén de formas abstractas —las estructuras matemáticas— y ocurre, sin que sepamos por qué, que ciertos aspectos de la realidad empírica se ajustan perfectamente a estas formas, como si hubiera habido una especie de preadaptación".

V. Actividades

1. Hacer la lectura conjunta del artículo con los alumnos y explicar que la postura de Bourbaki es sólo una de varias existentes en cuanto a cómo interpretar los resultados de las matemáticas.
2. Plantear a los alumnos las cuatro posturas presentadas en la guía y fomentar un debate, dividiendo al grupo en cuatro equipos, cada uno de los cuales defenderá una postura. NOTA: este ejercicio tendrá mayores posibilidades de éxito en cursos avanzados de física y matemáticas de bachillerato.
3. Discutir con los alumnos cuál creen que es la postura que impera en los programas y clases de matemáticas en el bachillerato.

VI. Bibliografía

The World Treasury of Physics, Astronomy and Mathematics, Timothy Ferris (ed.), Little, Brown & Company, Boston, 1991.

Boyer, Carl B., *Historia de la matemática,* Alianza Universidad, Madrid, 1992.

¿cómoves? guíadelmaestro

Por Rosa María Catalá

Marzo 2006

El insólito matemático Nicolas Bourbaki

De: Gabriela Frías (No. 87, p. 22)

Maestros:

Esta guía se ha diseñado para que un artículo de cada número de *¿Cómo ves?* pueda trabajarse en clase con los alumnos, de modo que se adapte a los programas de ciencias naturales y a los objetivos generales de estas disciplinas a nivel bachillerato. Esperamos que la información y las actividades propuestas sean un atractivo punto de partida o un novedoso "broche de oro" para dar un ingrediente de motivación adicional a sus cursos.

I. Relación con los temarios del Bachillerato UNAM

Esta guía y el artículo de referencia pueden utilizarla maestros de matemáticas de cursos avanzados, dado que trata un pasaje interesante de la historia de esta ciencia, episodio que marcó el inicio de mejores métodos de enseñanza que revolucionaron las escuelas tanto de Francia como del mundo.

II. Antes que nada... ¿qué son las matemáticas?

Los filósofos por mucho tiempo se han planteado la pregunta de si las hermosas relaciones descubiertas en matemáticas no son sino meros constructos de la mente humana o, tal vez, realmente existan en un mundo exterior. En otras palabras, si las relaciones son inventadas o descubiertas por los matemáticos. Un bello ensayo sobre esta temática fue escrito por John D. Barrow en su libro *El mundo dentro del mundo* (*The world within the world*), publicado en 1988 y del cual trataré de hacer un breve resumen que aclare la postura del famoso Nicolas Bourbaki.

No es sencillo expresar qué son las matemáticas, pero "sé reconocerlas cuando las veo", es la respuesta mas probable de la mayoría de las personas a las que se les propone esta cuestión. Y es que el aspecto más sorprendente sobre la matemática es su diferencia con respecto a la ciencia, lo cual nos lleva al cuestionamiento de por qué es tan útil a la hora de describir y predecir cómo funciona el Universo. Mientras que la ciencia es como un largo texto que se reescribe continuamente, se actualiza y se edita con nuevas versiones, las matemáticas son enteramente acumulativas. La ciencia contemporánea será tachada de errónea e incompleta en unos cuantos años, pero no así las matemáticas. Las ideas de los científicos del pasado que hoy se consideran incorrectas están bien justificadas tomando en cuenta el contexto y los medios con los que contaban, pero no hay ninguna justificación para establecer resultados matemáticos erróneos. Así, la mecánica de Aristóteles resultó ser incorrecta con los años, pero la geometría de Euclides es, fue y siempre será correcta. Correcto e incorrecto significan cosas distintas en ciencia y en matemáticas, ya que en la primera "correcto" significa correspondencia con la realidad, mientras que en matemáticas significa consistencia lógica.

Antes de que se puedan sacar conclusiones de nuestra buena fortuna en encontrar que las matemáticas describen de una manera tan precisa nuestra experiencia de la realidad, necesitamos tener algún entendimiento de lo que los matemáticos piensan sobre las matemáticas, o por lo menos lo que piensan que pueden ser.

III. Cuatro interpretaciones

Existen esencialmente cuatro interpretaciones de las matemáticas, y el punto de vista de cada una determinará en gran medida la evaluación que se puede hacer de la notable eficacia de las matemáticas para describir la naturaleza. Por otro lado, la aplicación natural de las matemáticas al mundo de la experiencia puede tomarse como una evidencia clave al decidir los méritos de las distintas interpretaciones de esta ciencia, ya que cada una de ellas es un posible punto de vista de lo que se quiere establecer como "verdadero" matemáticamente hablando. A partir de aquí llamaremos *Platonismo, Conceptualismo, Intuicionismo* y *Formalismo* (establecido justamente por Bourbaki y por ello su aparición más extensa en esta guía) a cada una de esas visiones:

Platonismo

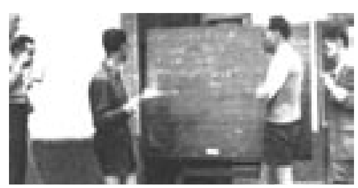
Esta es la visión que dice que los matemáticos descubren —más que inventan— las matemáticas. Todos los conceptos a los que llegan y encuentran útiles, llámense grupos y series, triángulos y puntos, infinitos y hasta números, realmente existen "allá afuera", independientemente de nosotros los observadores. Habría entidades matemáticas aunque no hubiese matemáticos(as); no son creaciones de la mente humana sino manifestaciones de la naturaleza intrínseca de la realidad. "Pi" y otras entelequias están realmente en el cielo, pero no son objetos que existen en el espacio y el tiempo, sino entidades abstractas que hacen que la verdad matemática implique correspondencia entre las propiedades de estos entes abstractos y nuestro sistema de símbolos. Bajo esta visión, podríamos utilizar las entidades matemáticas como lenguaje para comunicarnos con seres de otros mundos con la confianza de que éstos podrían descubrir las mismas estructuras matemáticas que nosotros (tómese en cuenta por ejemplo, el libro y luego película *Contacto*, de Carl Sagan). Los extraterrestres seguramente no usarían los mismos símbolos que nosotros ni hablarían el mismo idioma, pero aún así esperaríamos que los entendieran, de igual manera que aquí las palabras "siete", "*seven*" y "*sept*" codifican la misma información para personas mexicanas, inglesas o francesas.

Curiosamente, ese código no puede mantenerse en ninguna otra parte de la cultura humana. El arte y la ética, nuestras formas de gobierno y estilos de literatura probablemente serían ininteligibles para los alienígenas porque no describen algo completamente independiente de nuestras mentes. Por lo tanto, los platonistas pueden estar tranquilos de usar el lenguaje matemático debido a que lo tienen como una descripción etérea y absoluta.

Conceptualismo

Este criterio es la antítesis completa del Platonismo y es popular entre los sociólogos, más que entre los matemáticos y científicos, la mayoría de los cuales lo rechazan. Establece que nosotros creamos una serie de estructuras matemáticas, simetrías y patrones, y luego forzamos al mundo a ajustarse a ellas como en un molde, debido a que encontramos dicha actividad altamente estimulante. Y por lo tanto las matemáticas que construimos son derivadas directamente de la cultura, las inventamos y podemos asegurar que las matemáticas son lo que hacen los matemáticos. La sospecha de que puede haber alguna verdad en esta postura ha llevado a un giro gradual y casi imperceptible en la forma en que los que tienen como profesión las matemáticas aplicadas describen su quehacer.

Mientras que los matemáticos clásicos de ayer hubieran escrito tratados o dado conferencias sobre "la teoría matemática de...", hoy existe un énfasis creciente en el término menos grandilocuente de "modelaje matemático". Esto ilustra el hecho de que el conceptualista no ve al Universo como algo intrínsecamente matemático; Dios no es un matemático, pero lo que él hace puede justamente describirse por medio de "modelos matemáticos". Y como los conceptualistas consideran a las matemáticas exclusivamente como creación de la mente, sin base en ninguna realidad externa, no esperan poderse comunicar con los posibles habitantes de alguna región de Andrómeda por medio de las matemáticas.



Este punto de vista puede tener especial significado y consecuencia para los físicos. Podría, por ejemplo, argumentarse que las llamadas constantes universales de la naturaleza (cantidades como la constante gravitacional *G* de Newton), que emergen como constantes indeterminadas de proporcionalidad en nuestras ecuaciones matemáticas, son solamente artefactos de la representación particular que hemos escogido para representar la fuerza gravitacional. En ese sentido *G* está vista como una creación cultural y refleja nuestra inclinación de expresar los fenómenos naturales de una forma particular, por lo que el conceptualismo es una forma de antirrealismo dirigida por una profunda antiteorización de las matemáticas.

Intuicionismo

El nombre intuicionismo refleja la creencia de que sólo las ideas más simples e intuitivas pueden usarse en matemáticas y en ciencias. Cualquier cosa fuera de nuestra experiencia debe construirse a partir de los ingredientes más simples por medio de una secuencia de pasos que resulten familiares. En este sentido, esta visión es análoga con lo que se conoce como postura operacionalista, aunque, mientras que el operacionalista restringe su atención a cantidades medibles para evitar introducir conceptos "obvios" como simultaneidad (lo cual puede resultar experimentalmente absurdo), el intuicionista mantiene los conceptos "obvios" para evitar llegar al "sin sentido". Esta interpretación de las matemáticas fue consecuencia del uso de los conceptos no intuitivos en las demostraciones matemáticas. Para evitar la fundamentación de áreas completas de las matemáticas al asumir que las secuencias infinitas comparten las propiedades "obvias" de las finitas, se propuso que sólo se pudieran construir cantidades a partir de los números naturales 1, 2, 3... en una serie de pasos lógicos cuya validez pudiera demostrarse. Antes del trabajo de Cantor en series infinitas (véase "Guía del maestro", *El Gran Hotel Cantor*, No. 29), los matemáticos no habían hecho uso del infinito formalmente, sólo habían explotado la idea de cantidades que pudiesen ser arbitrariamente grandes o pequeñas. Esta idea forma la noción de límite, introducida en el siglo XIX por Cauchy y Weiertrass, en donde cada paso debe de manera inequívoca (sin ambigüedades) especificar el siguiente paso lógico que debe tomarse. Es por ello que a esta postura también se le conoce como *constructivismo*.

Existe un paralelismo entre las metas de los intuicionistas y las de algunos intérpretes de la mecánica cuántica. Tanto Bohr como los intuicionistas trataron de introducir nuevas visiones de las cantidades físicas y matemáticas que los separaron de una realidad objetiva. Una medición cuántica refleja el estado de conocimiento sobre una realidad física. Una fórmula matemática, de acuerdo con los intuicionistas, sólo describe una serie de cálculos que se han llevado a cabo para llegar a ella. No es una representación de ninguna realidad existente excepto la del acto de hacer el cálculo. Para resumir, los intuicionistas excluyen todos los argumentos que demuestran la existencia de algo para cuya construcción no tengan la receta.

Formalismo

Éste es el más relacionado con el tema del artículo de referencia y es obviamente una de las posturas más recientes y complejas.

La presentación de las matemáticas por Bourbaki se caracteriza por una adhesión inflexible al planteamiento axiomático y a una forma general y completamente abstracta de desarrollo que refleje claramente la estructura lógica. Así pues, el enfoque bourbakista de las matemáticas es algo análogo (en los niveles más altos de la investigación), a los cambios que sufrió la enseñanza de la matemática desde la escuela primaria hasta la media superior a partir de la década de los 60.

En su apuesta de que enseñar a pensar lógicamente economiza considerablemente el pensamiento y las tareas de los estudiantes, los formalistas o logísticos (y los programas de enseñanza que se les han adherido), han puesto de manifiesto un número de paradojas lógicas bastante embarazosas (complicadas), y a partir de ellas han